**ANALIZA FUNKCJONALNA**
**LISTA 7**

Przez $H$ oznaczamy przestrzeń Hilberta nad ciałem rzeczywistym lub zespolonym.

1. Pokazać, że dwa rzuty ortogonalne $P_M, P_N$ na podprzestrzenie domknięte w $H$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy gdy te podprzestrzenie są ortogonalne.

2. Pokazać, że $P_M + P_N$ jest rzutem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy gdy $P_M P_N = 0$. Pokazać także, że wtedy $P_M + P_N = P_{M \oplus N}$, gdzie $M \oplus N$ jest sumą prostą $M$ oraz $N$ (w przypadku przestrzeni Hilberta przez $M \oplus N$ zazwyczaj rozumiemy sumę prostą podprzestrzeni liniowych $M, N$, w której $\langle x_1 + y_1, x_2 + y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$ dla $x_1, x_2 \in M$, $y_1, y_2 \in N$)

3. Pokazać, że jeżeli $T$ jest operatorem samosprzężonym na $H$ (nad ciałem zespolonym), to zachodzi wzór

$$\begin{aligned} 4\langle T(x), y \rangle &= \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \\ &+ i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - i\langle T(x-iy), x-iy \rangle \end{aligned}$$

   dla dowolnych $x, y \in H$.

4. Pokazać, że jeżeli $T \in B(H)$, gdzie $H$ jest nad ciałem liczb zepolonych, spełnia warunek $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, to $T$ jest operatorem samosprzężonym.

5. Pokazać, że wartości własne $\lambda$ operatora unitarnego mają moduł równy jeden, tzn. $|\lambda| = 1$.

6. Niech $T \in B(H)$ będzie surjekcją. Udowodnić, że wtedy następujące warunki są równoważne:
   (a) $T$ zachowuje odległość, tzn. $\| T(x) - T(y) \| = \| x - y \|$ dla dowolnych $x, y$
   (b) $T$ zachowuje normę, tzn. $\| T(x) \| = \| x \|$ dla dowolnego $x$
   (c) $T$ zachowuje iloczyn skalarny, tzn. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ dla dowolnych $x, y$
   (d) $T$ jest operatorem unitarnym

7. Wyznaczyć operator sprzężony do operatora $T : l^2 \to l^2$ zadanego wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

   Czy operator ten jest unitarny? A czy zachowuje iloczyn skalarny?

8. Wyznaczyć operator sprzężony do operatora $T : l^2 \to l^2$ zadanego wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

   Czy operator ten jest unitarny?

9. Opisać wszystkie operatory unitarne oraz ortogonalne w przestrzeniach Euklidesowych $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$.

10. Dla operatora $T$ z zadania 8 wyznaczyć zbiór $\sigma_p(T)$ wszystkich wartości własnych (widmo punktowe) oraz całe widmo $\sigma(T)$.

11. Dla operatora $T : l^2 \to l^2$ (nad ciałem zespolonym) zadanego wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots)$$

   (a) pokazać, że jest on ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy $(\alpha_n)$ jest ograniczonym ciągiem liczb zespolonych

   (b) w tym przypadku wyznaczyć zbiór wszystkich wartości własnych, a dla każdej wartości własnej $\lambda$ wyznaczyć jej przestrzeń własną $V_\lambda$.

*R. Lenczewski*